Provau que aquest quadrilàter és un rectangle.

Solució: (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, de l'INS de Cassà de la Selva.) Com que l'angle $\widehat{ABC}$ és recte, podem col·locar els vèrtexs A, B i C sobre un sistema d'eixos. Siguin

$$A = (0, a)\,,\ B = (0, 0)\,,\ C = (c, 0) \text{ i } D = (d_x, d_y)$$

i, per provar que el quadrilàter convex $ABCD$ és un rectangle, n'hi haurà prou a veure que $d_x = x$ i que $d_y = a$.

A partir de la igualtat del quadrat de les fraccions de l'enunciat, tenim:

$$\frac{d_x^2 + (d_y - a)^2}{c^2} = \frac{(d_x - c)^2 + d_y^2}{a^2} = \frac{d_x^2 + d_y^2}{c^2 + a^2} \qquad (*)$$

i, com que de les igualtats

$$\frac{p}{u} = \frac{q}{v} = \frac{r}{u + v}$$

es desprèn de manera òbvia que $r = p + q$, en aplicar això a les igualtats $(*)$ obtenim:

$$d_x^2 + d_y^2 = d_x^2 + (d_y - a)^2 + (d_x - c)^2 + d_y^2$$

és a dir

$$(d_y - a)^2 + (d_x - c)^2 = 0$$

que implica $d_x = x$ i $d_y = a$, tal com volíem veure.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Tesis i treballs de fi de màster

Ajuts per a tesis doctorals en català

La Generalitat de Catalunya (a través de l'AGAUR) dóna ajuts especials per a escriure les tesis en català.

Els poden sol·licitar tots aquells a qui els falti poc per escriure i defensar la tesi doctoral.

L'última convocatòria es va tancar el 15 de juliol passat, però es preveu que es tornarà a obrir aquest curs.

L'objectiu dels ajuts era atorgar ajuts per a tesis doctorals escrites en català que s'haguessin defensat durant l'any 2010, per tal de contribuir a les despeses i taxes administratives associades amb la finalització de la tesi doctoral i amb el tràmit d'obtenció del títol de doctor o doctora.

Podien sol·licitar l'ajut totes les persones que haguessin defensat la tesi durant l'any 2010, que haguessin obtingut el títol de doctor en una universitat del sistema universitari de Catalunya o de fora de l'Estat espanyol, i que haguessin escrit la tesi en català, d'acord amb la base 1 de la convocatòria.

Més informació:

http://www10.gencat.cat/agaur_web/AppJava/catala/a_beca.jsp?categoria=altres&id_beca=17741

Tesis

- Àngel Garcia-Cerdaña va llegir la seva tesi, dirigida per Francesc Esteva Massaguer i Ventura Verdú Solans, titulada *Lògiques basades en normes triangulars: una contribució a l'estudi dels seus aspectes subestructurals*, el dia 20 de novembre de 2007. La tesi correspon al Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística de la Universitat de Barcelona.

La semàntica multivalorada associada a la lògica borrosa comprèn certes operacions definides a l'interval real $[0,1]$ que generalitzen les funcions de veritat booleanes clàssiques definides al conjunt $\{0,1\}$. Una *norma triangular* (abreujadament, t-norma) és una operació binària definida a l'interval real $[0,1]$ que és monòtona en els dos arguments, associativa, commutativa i que té l'1 com a element unitat. Els sistemes de lògica borrosa prenen les t-normes contínues per l'esquerra i el seus residus com a funcions de veritat per a la *conjunció multiplicativa* o *fusió* i la *implicació*, respectivament. Una lògica és *borrosa* i *basada en t-normes* si és correcta i completa respecte de les estructures definides a $[0,1]$ per a un cert conjunt de t-normes contínues per l'esquerra i els seus residus.

Per la seva banda, una lògica és *subestructural* si admet una presentació en termes de seqüents, que s'obté suprimint o restringint algunes de les anomenades regles estructurals (intercanvi, debilitament i contracció) d'una presentació en termes de seqüents de la lògica intuïcionista o de la lògica clàssica.

El desenvolupament d'aquests dos camps de recerca està lligat íntimament a dos llibres: *Substructural logics*, de K. Došen i P. Schroeder-Heister, de l'any 1993, que és la primera monografia sobre aquesta família de lògiques, i, pel que fa a les lògiques borroses, *Metamathematics of fuzzy logic*, de Petr Hájek, publicat l'any 1998, que és la primera obra dedicada al tractament sistemàtic dels sistemes formals associats a la lògica borrosa.

Aquesta tesi és una contribució a l'estudi de les connexions entre les lògiques borroses basades en t-normes i les lògiques subestructurals. Les connexions entre ambdós camps d'investigació es basen en el fet que la lògica més general de la família de lògiques borroses basades en t-normes, la lògica MTL d'Esteva i Godo, és una extensió axiomàtica de la lògica subestructural intuïcionista bàsica sense contracció (però amb *exchange* (intercanvi) i *weakening* (debilitament) estudiada pel lògic japonès Hiroakira Ono i que denotem $\mathfrak{e}\mathbf{FL}_{ew}$ (tècnicament, és el sistema deductiu extern associat al càlcul de seqüents $\mathbf{FL}_{ew}$). Les eines utilitzades en el nostre estudi són la lògica algebraica abstracta i la teoria dels sistemes de Gentzen.

La tesi, escrita en català, conté les nocions preliminars necessàries per a la seva lectura, la còpia íntegra (en anglès) de cinc articles d'investigació publicats i una part dedicada a la generalització d'alguns dels resultats obtinguts en els articles a un marc subestructural més general. Les principals contribucions de la tesi són les següents:

1. Es complementa la jerarquia de lògiques sobre $\mathfrak{e}\mathbf{FL}_{ew}$ estudiades per Ono, combinant aquesta jerarquia amb axiomes característics de certes lògiques borroses basades en t-normes.
2. S'estudien certes condicions de definibilitat de les connectives de conjunció i disjunció en extensions de $\mathfrak{e}\mathbf{FL}_{ew}$ i de MTL.
3. S'estudien certs fragments sense la connectiva d'implicació del sistema de Gentzen $\mathbf{FL}_{ew}$ i del seu sistema extern associat $\mathfrak{e}\mathbf{FL}_{ew}$.
4. Es generalitzen part dels resultats relatius a fragments sense implicació a contextos subestructurals més amplis (sense contracció però també sense *weakening* o sense *exchange*). Aquests resultats de generalització han estat publicats en anglès dins la col·lecció de monografies de l'Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial del CSIC.

Entenem per *fragment* d'una lògica expressada en un llenguatge $\mathcal{L}$ la restricció de la relació de conseqüència d'aquesta lògica a un subllenguatge de $\mathcal{L}$. L'estudi dels fragments és important per tal de caracteritzar l'aportació de cada connectiva a les propietats generals de la lògica considerada. A part del seu interès en si mateix, l'estudi dels fragments sense implicació de $\mathfrak{e}\mathbf{FL}_{ew}$ es proposa com a estratègia dirigidada a obtenir caracteritzacions de tots els fragments

sense implicació de les lògiques borroses basades en t-normes. En aquesta línia, un dels nostres resultats més rellevants el constitueix la demostració del fet que les connectives de conjunció additiva i multiplicativa (i. e., la conjunció reticular i la fusió) són indistingibles en els corresponents fragments sense implicació ni negació de $\mathfrak{e}\mathbf{FL}_{ew}$. Això té com a corol·lari que les dues connectives esmentades també són indistingibles en totes les lògiques borroses basades en t-normes.

- Santiago Molina Blanco va llegir el treball de fi de màster, dirigida per Josep Gonzàlez Rovira i Victor Rotger Cerdà, titulada *Ribet bimodules, the specialization of Heegner points and applications*, el dia 7 de juliol de 2010. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada 4 de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Un dels objectes centrals de la geometria aritmètica actual és l'estudi de les anomenades *corbes modulars i de Shimura*. Aquestes corbes estan associades a un cert tipus d'àlgebres de quaternions. En el cas especial de les corbes modulars, la corresponent àlgebra de quaternions és l'àlgebra de matrius, i això dóna lloc al fet que la seva anàlisi sigui molt més tractable. Molts dels mètodes emprats en l'anàlisi de les corbes modulars no són generalitzables al cas de les corbes de Shimura. En aquesta tesi explorem certes propietats aritmètiques d'aquestes corbes i les utilitzem per al càcul d'equacions explícites.

Les corbes de Shimura tenen la peculiaritat d'estar dotades d'un cert tipus de punts, associats a cossos quadràtics imaginaris. Aquests punts, anomenats punts de Heegner, tenen una descripció purament algebraica. Donat un cos quadràtic imaginari, el conjunt de punts de Heegner associats a aquest cos està en correspondència amb un cert tipus de conjunts d'immersions en l'àlgebra de quaternions corresponent a la corba de Shimura. El propòsit d'aquesta tesi és l'estudi de l'especialització d'aquest conjunt de punts de Heegner en les diverses fibres especials de la corba de Shimura, i hem centrat el nostre esforç en el cas de reducció singular.

Donat un primer p, sabem que els conjunts de punts singulars i components irreductibles, si p és un primer de reducció singular, o de punts supersingulars, si p és un primer de bona reducció, també tenen una caracterització purament algebraica. Aquesta descripció algebraica dels objectes on els punts redueixen junt amb la interpretació del mateix conjunt de punts de Heegner com a conjunt d'immersions en l'àlgebra de quaternions, fa que l'especialització d'aquests punts doni lloc a una aplicació purament geomètrica entre objectes algebraics. Al llarg d'aquest treball demostrem que la condició necessària i suficient per a determinar quan un punt de Heegner s'especialitza a un punt singular és també purament algebraica i correspon a veure si p ramifica en el cos. A més a més, donem una interpretació algebraica de l'aplicació geomètrica esmentada anteriorment.

La construcció d'aquestes aplicacions algebraiques permet el càlcul explícit de les especialitzacions d'aquests punts de Heegner mitjançant, per exemple, el programari MAGMA. En el cas que la corba de Shimura sigui hiperel·líptica, per tant definida per una equació de la forma $y^2 = P(x)$, el control de la reducció de certs punts de Heegner dóna informació sobre els discriminants i les resultants del polinomis que intervenen en la factorització de $P(x)$ sobre els racionals. Combinant aquest fet amb l'obtenció dels cossos de definició dels polinomis mitjançant la teoria de multiplicació complexa i la determinació dels coeficients dominants mitjançant la interpretació de la corba com a espai de moduli que parametritza certes superfícies abelianes, podem obtenir el polinomi $P(x)$ i, per tant, podem calcular explícitament equacions per a aquestes corbes. Notem que aquest càlcul d'equacions de corbes de Shimura utilitza propietats aritmètiques de la corba i, per tant, es diferencia totalment del càlcul explícit d'equacions de corbes modulars clàssiques, on les eines emprades són les sèries de Fourier associades a formes modulars al voltant de les cúspides.

Finalment, a més del càlcul d'equacions explícites, els nostres resultats teòrics sobre la reducció dels punts de Heegner tenen altres aplicacions en diversos àmbits. En la part final

de la tesi intentem explorar tres d'aquestes aplicacions, que són:

- L'estudi de la distribució de les especialitzacions dels punts de Heegner entre el conjunt de punts singulars o components irreductibles d'una fibra especial singular.
- El càlcul del grup d'automorfismes d'una corba de Shimura.
- La imatge dels divisors de grau zero amb suport a punts de Heegner en el grup de components connexos de la reducció de la jacobiana de la corba de Shimura i la seua relació amb la conjectura de Birch i Swinnerton-Dyer.

- Yago Antolín Pichel va llegir la seva tesi, dirigida per Warren Dicks McLay, titulada *On a class of two-relator groups*, el dia 14 de juliol de 2010. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

La meva tesi doctoral està gairebé tota dedicada a estudiar una família de grups que generalitzen els anomenats grups d'una relació. A més d'aquesta família, la tesi també fa una contribució a la teoria dels grups virtualment lliures.

L'any 1990, John Hempel va fer un treball sobre grups fonamentals de superfícies compactes i orientables en les quals s'havia col·lapsat prèviament una corba tancada. Suposem que S és el grup fonamental de la superfície i α és l'element de S que representa la classe d'homotopia de la corba col·lapsada; llavors els grups que Hempel va estudiar són de la forma $S/\langle\!\langle\, \alpha \,\rangle\!\rangle$ (on $\langle\!\langle\, \alpha \,\rangle\!\rangle$ denota la clausura normal de α en S); tots aquests admeten una presentació del tipus

$$\begin{aligned}\langle x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \parallel [x_1, y_1] \cdot [x_2, y_2] \cdots \\ [x_n, y_n] = 1, r = 1\rangle\end{aligned} \tag{1}$$

on $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ (i. e. el commutador de x i y) i r és una paraula qualsevol en $\{x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n\}^{\pm 1}$. Aquests grups es diuen *grups de superfície (orientable) amb una relació.*

Poc abans de començar la tesi, el tutor, Warren Dicks, amb Peter Linnell, havien acabat un article on calculaven els números L^2 de Betti per a aquests grups, fent ús de resultats previs de Hempel i Howie. Els mètodes que varen fer servir Hempel i Howie eren de tipus topologicogeomètric. El meu primer objectiu va ser desenvolupar una versió algebraica de la teoria de grups de superfície amb una relació. Una pregunta natural dins d'aquest context és la següent: quina és la diferència entre considerar superfícies orientables i no orientables? La resposta és que, quan la característica d'Euler és prou gran, no hi ha cap diferència.

Un resultat clàssic de teoria de superfícies diu que la suma connexa d'un tor i n plans projectius és homeomorfa a la suma connexa de $n + 2$ plans projectius. Al nivell de grups, això es tradueix en l'isomorfisme següent:

$$\begin{aligned}\langle x, y, z_1, \ldots, z_n \mid [x, y]z_1^2, \cdots, z_n^2 = 1\rangle \cong \\ \cong \langle z_1, \ldots, z_{n+2} \mid z_1^2 \cdots z_{n+2}^2 = 1\rangle .\end{aligned}$$

Inspirats per aquest isomorfisme, a la tesi vaig introduir i estudiar una família de grups amb dues relacions que conté els grups de superfície amb una relació, tant els orientables com els no orientables. Concretament, els grups són de la forma:

$$\begin{aligned}\langle x, y, z_1, \ldots, z_n \mid [x, y] = w(z_1, \ldots, z_n), \\ r(x, y, z_1, \ldots, z_n) = 1\rangle\end{aligned} \tag{2}$$

on $w(z_1, \ldots, z_n)$ és una paraula qualsevol en $\{z_1, \ldots, z_n\}^{\pm 1}$, i $r(x, y, z_1, \ldots, z_n)$ és una paraula qualsevol en $\{x, y, z_1, \ldots, z_n\}^{\pm 1}$. Hi ha unes condicions tècniques que ha de complir r (que sempre es compleixen en el cas de superfícies) i que ignorarem per simplificar aquest text.

Amb idees semblants a les de Hempel un dels resultats de la tesi demostra que, com en el cas de grups de superfície amb una relació, el grups com (2) són extensions HNN de grups d'una relació, on els subgrups associats són subgrups de Magnus. És per això que als grups com (2) els anomenem *grups de Hempel.*

Els grups de Hempel tenen una presentació *Cohen-Lyndon aspherical.* El capítol tercer de la

tesi està dedicat a aquests tipus de prensentacions. Aquesta propietat algebraica implica que el grup admet un model per a l'espai classificador d'accions pròpies de dimensió 2 que permet descriure l'estructura dels subgrups finits. Si G és un grup de Hempel, com a conseqüència del fet que té una presentació *Cohen-Lyndon aspherical*, obtenim una successió exacta de $\mathbb{Z}G$-mòduls, i els grups d'homologia de Bredon amb coeficients a l'anell de representacions complexes.

Els grups de Hempel són gairebé *locally indicable*, és a dir, tot subgrup finitament generat i no trivial té un quocient isomorf a $\mathbb{Z}$. Aquest resultat es fa servir en un dels resultats principals de la tesi, que consisteix a generalitzar el còmput dels números L^2 de Betti per a grups de superfície (no orientable) amb una relació. Tot el capítol cinquè està dedicat als grups *locally indicable* i a desenvolupar una versió tipus Bass-Serre de la *tower technique* de Howie. Aquesta tècnica inductiva permet estudiar generalitzacions de grups amb una relació i es fa servir intensament per provar moltes de les propietats del grups de Hempel.

Els altres grups estudiats a la meva tesi són els grups virtualment lliures. Un grup es diu virtualment lliure si té un subgrup lliure d'índex finit. Al capítol tercer es prova l'equivalència de diferents condicions sobre un graf localment finit. Totes aquestes condicions, si el graf és un graf de Cayley d'un grup G respecte d'algun sistema de generadors X, impliquen que G és virtualment lliure. Recordem que el graf de Cayley de G respecte d'un sistema de generadors X té per conjunt de vèrtexs al mateix grup G, i dos vèrtexs $g, h \in G$ estan connectats per una aresta si $g = hx$ per algun $x \in X$. Moltes d'aquestes equivalències eren ben conegudes, però feien ús d'un teorema molt profund d'acessibilitat de Dunwoody. En la tesi, s'obtenen les mateixes equivalències usant només un teorema anterior de Dunwoody més senzill. Aquest resultat apareixerà publicat properament.

- Noemí Ruiz Munón va llegir la seva tesi, dirigida per Josep Gascon Pérez i Marianna Bosch i Casabò, titulada *La introducció de l'àlgebra elemental i el seu desenvolupament cap a la modelització funcional*, el dia 17 de desembre de 2010. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

La nostra investigació parteix dels treballs entorn al problema didàctic de l'àlgebra elemental realitzats per l'investigador francès Yves Chevallard. Aquests treballs posen de manifest que la funció principal de l'àlgebra no és la de generalitzar l'aritmètica sinó la de modelitzar sistemes intramatemàtics o extramatemàtics. Seguint aquesta línia d'investigació, diversos treballs en el marc teòric de la teoria antropològica del didàctic (TAD) han qüestionat el model epistemològic didàctic de l'àlgebra elemental que domina a les institucions escolars, el qual ha estat caracteritzat com a a*ritmètica generalitzada* (tesi de Pilar Bolea).

El nostre treball pren com a objecte d'estudi el problema didàctic del pas de l'aritmètica a l'àlgebra i el pas de la modelització algebraica al càlcul diferencial. D'acord amb el que s'entén a la TAD per *ensenyar* i *aprendre* matemàtiques, s'ha construït un model epistemològic de referència de l'àlgebra elemental articulat en tres etapes i un model pel seu posterior desenvolupament cap a la modelització funcional estructurat en tresw nivells. La idea principal és que inicialment l'àlgebra s'identifica amb un instrument de modelització de tot tipus de coneixement matemàtic, que posteriorment es convertirà en un objecte d'estudi en si mateixa.

A partir d'aquest model s'han experimentat quatre activitats d'estudi i investigació (AEI) que emfasitzen alguna de les etapes o nivells del procés de modelització algebraico-funcional. La primera AEI, orientada als primers cursos de l'ensenyament secundari obligatori, se centra en la introducció de l'àlgebra com una eina que permet explicar certs fenòmens numèrics (per exemple, la justificació de jocs de matemàgia). La segona i tercera AEI se centren en algunes de les vies de desenvolupament de l'instrument algebraic ja introduït. Una de les possibles evolucions és cap al llenguatge funcional i l'altra cap a la creació, manipulació i interpretació de models o fórmules en un context econòmic. Finalment, la quarta AEI es va desenvolupar en

l'ensenyament secundari postobligatori entorn a una activitat de modelització que involucrava funcions elementals. Aquestes experimentacions es van dur a terme a diversos instituts de l'àrea metropolitana de Barcelona (IES Costa i Llobera, IES Vall d'Hebrón, IES Sant Andreu, IES Príncep de Girona) i dels voltants (IES Serra de Marina de Premià de Mar, IES Federica Montseny de Badia del Vallès) al llarg de diferents cursos acadèmics.

L'anàlisi clínica de les diferents propostes didàctiques posa de manifest les possibilitats de canvi de l'ensenyament de l'àlgebra, tot i que també mostra algunes de les carències matemàticodidàctiques, és a dir, el tipus de restriccions que limiten, o dificulten, la vida de la modelització algebraicofuncional en els actuals sistemes d'ensenyament catalans. En alguns casos ja hem apuntat gestos didàctics que contribueixen a la superació d'aquestes restriccions com l'ús, amb certes directrius, de programes informàtics (per exemple, la calculadora WIRIS).

- Mireia Besalú i Mayol va llegir la seva tesi, dirigida per Carles Rovira Escofet, titulada *Equacions diferencials estocàstiques dirigides per un moviment brownià fraccionari*, el dia 2 de març de 2011. La tesi correspon al Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística de la Universitat de Barcelona.

Un dels processos estocàstics més utilitzats i amb més aplicacions és el moviment brownià estàndard, un procés gaussià de mitjana 0 i amb funció de covariància $\min(s,t)$. Ara bé, durant l'última dècada s'han publicat una quantitat notable de treballs relacionats amb el moviment brownià fraccionari (fBm).

El moviment brownià fraccionari, W^H, és un procés gaussià que generalitza el moviment brownià estàndard i que va ser estudiat per primera vegada per Mandelbrot i Van Ness. Aquest procés depèn d'un paràmetre H que s'anomena paràmetre de Hurst. Aquest paràmetre pren valors entre $(0,1)$, essent el cas particular $H=\frac{1}{2}$, el moviment brownià estàndard. Per a la resta de valors, hem de diferenciar si $H>\frac{1}{2}$ o si $H<\frac{1}{2}$, ja que les propietats que obtenim són diferents. Per exemple, si $H>\frac{1}{2}$ les trajectòries del moviment brownià fraccionari són més regulars que les del moviment brownià estàndard, i una altra propietat en aquest mateix cas és que podem utilitzar-lo com a model en situacions de dependència a llarg termini. En el cas contrari, per a $H<\frac{1}{2}$, les trajectòries són més irregulars que les del moviment brownià estàndard.

A la tesi presentem tres treballs dedicats a l'estudi d'equacions diferencials estocàstiques dirigides per un moviment brownià fraccionari amb diferents valors del paràmetre de Hurst. Treballem tres equacions diferents, totes dirigides per un moviment brownià fraccionari. Per a aquestes equacions demostrem resultats d'existència i unicitat de solució i també provem que les respectives solucions tenen moments finits.

Quan estudiem equacions diferencials estocàstiques, una de les primeres qüestions que ens hem de plantejar és com entenem la integral estocàstica. En particular, en el cas d'equacions dirigides pel moviment brownià fraccionari, com que les propietats d'aquest procés varien depenent del valor del paràmetre de Hurst H, la manera com treballarem amb les equacions dirigides per un moviment brownià fraccionari amb $H>\frac{1}{2}$ serà diferent del cas on $H\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.

En el cas on $H>\frac{1}{2}$, la integral estocàstica $\int_0^T u_s dW_s^H$ que apareix en els dos primers treballs es pot definir trajectòrialment com una integral de Riemann-Stieltjes utilitzant els resultats d'existència obtinguts per Young i el treball de Zähle que ens permet expressar les nostres integrals en termes d'operadors de derivades fraccionàries.

Pel que fa a la integral estocàstica $\int_0^T u_s dW_s^H$ de l'equació dirigida per un moviment brownià fraccionari amb $H\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$, utilitzarem la definició donada recentment per Hu i Nualart. De fet, Hu i Nualart donen una expressió explícita per a una integral de tipus $\int_0^t f(x_s)dy_s$, on y és una funció β-Hölder contínua per a $\beta\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$. Aquesta expressió depèn de les funcions x, y i del funcional multiplicatiu quadràtic $x\otimes y$.

Ara que ja hem explicat com definim les

integrals estocàstiques que apareixen a la tesi, anem a presentar les tres equacions diferencials estocàstiques que estudiem.

La primera equació diferencial estocàstica és una equació amb retard i amb restriccions de positivitat, o sigui, considerarem una equació tal que la seva solució serà sempre zero o positiva. Les equacions diferencials estocàstiques amb retard han estat àmpliament estudiades a causa de les seves múltiples aplicacions relacionades amb models poblacionals, reaccions bioquímiques, repressió genètica, models climàtics... D'altra banda, observem que alguns d'aquests models que acabem d'anomenar tracten amb quantitats que no poden ser negatives, per exemple concentracions d'ions o proporcions de poblacions infectades. Per tant, en aquests casos sembla natural utilitzar equacions diferencials estocàstiques amb retard i restriccions de positivitat.

La segona és una equació de Volterra amb $H > \frac{1}{2}$. Les equacions diferencials estocàstiques de Volterra han estat utilitzades per les seves aplicacions en el camp de la biologia i la física. En particular, els casos més estudiats són les equacions de Volterra estocàstiques dirigides per un moviment brownià estàndard o més en general el cas d'equacions dirigides per una semimartingala.

I finalment l'última és una equació d-dimensional amb $H \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. El pròposit del nostre treball és obtenir estimacions precises per a la norma del suprem de la solució de la nostra equació.

- Albert Ferreiro Castilla va llegir la seva tesi, dirigida per Frederic Utzet Civit, titulada *Stochastic calculus and analytic characteristic functions: applications to finance*, el dia 31 de maig de 2011. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

L'idea principal de la tesi és estudiar els processos estocàstics a través de la seva funció característica. L'avantatge d'aquest punt de vista és la possibilitat d'aplicar les eines de l'anàlisi complexa per obtenir resultats sobre la funció característica que posteriorment són traduïts a propietats probabilístiques del procés. La tesi és construïda com a compendi de publicacions amb quatre resultats principals.

En el primer treball vàrem aplicar el teorema de factorització de Hadamard i el teorema de descomposició de Mittag-Leffler, dos resultats clàssics d'anàlisi complexa, a la funció característica del model de Heston. Aquest model representa un dels exemples més importants de models de volatilitat estocàstica i és àmpliament usat a la indústria financera. Tot i que hi ha molta literatura sobre el model de Heston, molt poc se sabia sobre la seva funció de densitat. La tesi dóna una expressió de la densitat en forma de convolució infinita de variables aleatòries de Bessel, proporcionant una expressió tancada que caracteritza les seves propietats fonamentals. Provem que la densitat és $\mathcal{C}^\infty$ i obtenim un nou algoritme per a simular el procés així com un mètode per a calcular els moments del procés per un temps donat.

En el segon treball hem estès les tècniques emprades en l'estudi del model de Heston per a construir una família de distribucions que tenen com a funció característica un quocient de dos funcions enteres. En particular donem condicions suficients perquè el quocient de dues funcions enteres sigui una funció característica i aquesta es pugui invertir obtenint una expressió de la densitat. Mostrem com molts exemples coneguts i recurrents en la literatura pertanyen a aquesta família, és rellevant mencionar l'exemple de l'àrea de Lévy per a dos brownians.

L'estudi següent és una generalització de l'àrea de Lévy per a processos Gaussians generals. Aquests objectes tenen un paper fonamental en la teoria del *rough path*. El punt de partida és la identificació de l'àrea de Lévy clàssica —amb dos brownians— com un objecte del segon caos de Wiener de la descomposició de l'espai de distribucions de quadrat integrable. Posteriorment donem condicions suficients perquè dos processos gaussians generals tinguin un objecte equivalent en la descomposició en caos dels espais de variables associats. A aquest nou objecte l'anomenem *àrea de Lévy generalitzada*. En

particular, donem una descripció de la funció característica de l'àrea de Lévy generalitzada com a determinant de Carleman-Fredholm.

L'últim resultat de la tesi és l'estudi de processos de Lévy que tenen un exponent del tipus quocient de dues funcions enteres, anomenats *processos de Lévy meromòrfics*. Això permet obtenir expressions explícites dels factors de Wiener-Hopf que caracteritzen el comportament dels extrems del procés. En particular ens centrem en l'aproximació del procés de Meixner mitjançant processos de Lévy meromòrfics, obtenint un mètode per a aproximar el comportament del mínim d'un procés de Meixner. Emprem el resultat per a valorar opcions digitals i *credit default swaps*.

- Albert Mas Blesa va llegir la seva tesi, dirigida per Mark Melnikov i Xavier Tolsa Domènech, titulada *Variation for Riesz transforms and analytic and Lipschitz harmonic capacities*, el dia 22 de juny de 2011. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Les qüestions abordades en aquesta tesi doctoral pertanyen a l'anàlisi geomètrica que, entre altres coses, relaciona l'anàlisi harmònica amb la teoria geomètrica de la mesura. En particular, estan vinculades a les transformades de Cauchy i de Riesz, dos operadors fonamentals en l'anàlisi harmònica (i més concretament en la teoria de Calderón-Zygmund), les EDP, i la teoria geomètrica de la mesura.

El primer problema tractat a la tesi és d'aproximació racional. Considerem un compacte K del pla complex. Sigui $A(K)$ l'àlgebra de funcions contínues en K que són analítiques a l'interior de K, i sigui $R(K)$ la clausura (amb convergència uniforme) de les funcions que són analítiques en un entorn de K. En els anys seixanta, Vitushkin va donar una descripció dels compactes K per als quals $R(K) = A(K)$ en termes de la capacitat analítica, però encara no hi ha una caracterització d'aquests compactes en termes mètrics (la capacitat analítica pot definirse mitjançant la transformada de Cauchy). En aquesta direcció, O'Farrell va plantejar la pregunta següent: *Siguin K_1 i K_2 dos compactes de $[0,1]$ i sigui $K = (K_1 \times [0,1]) \cup ([0,1] \times K_2)$. És cert que $R(K) = A(K)$?*. He demostrat que la resposta a la pregunta és *no*, construint un compacte $K = (K_1 \times [0,1]) \cup ([0,1] \times K_2)$ per al qual $R(K) \neq A(K)$.

Amb la intenció d'abordar problemes d'aproximació harmònica, en els anys noranta Paramonov va definir les capacitats Lipschitz i $\mathbb{C}^1$ harmòniques κ i κ_c, respectivament. Aquestes capacitats es poden entendre com versions en dimensions superiors de les capacitats analítica i analítica contínua γ i γ_c, respectivament, definides sobre el pla complex. Hi ha molts problemes oberts en aquesta àrea, i diversos d'aquests neixen de resultats ja coneguts per γ i γ_c que es pretén estendre a dimensions superiors mitjançant κ i κ_c. En particular, hi ha una caracterització per dualitat de γ_c a partir de la coneguda funció de Garabedian. En la tesi he establert una caracterització per dualitat de κ_c amb el mateix esperit que la de γ_c.

L'últim problema tractat fa referència als conceptes de variació i oscil·lació que, aplicats a martingales i a algunes famílies d'operadors, han estat estudiats en molts articles de probabilitat, teoria ergòdica i anàlisi harmònica. En aquesta direcció, he estudiat els operadors de variació i oscil·lació per a integrals singulars de Calderón-Zygmund amb nucli senar (com són les transformades de Cauchy i de Riesz) sobre gràfiques Lipschitz. En particular, he demostrat que aquests operadors són afitats en tot L^p, per $1 < p < \infty$. Aquest resultat té aplicacions interessants. La més directa és una millora del celebrat resultat de Coifman, McIntosh i Meyer, sobre l'estimació en L^2 de la transformada de Cauchy en gràfiques Lipschitz. A més, està molt relacionat amb la pregunta, plantejada per David i Semmes fa més de vint anys, que connecta l'anàlisi harmònica amb la teoria geomètrica de la mesura, i que ha atret l'atenció de nombrosos matemàtics: *Sigui μ una mesura AD regular. És cert que μ és uniformement rectificable si i només si la transformada de Riesz respecte a μ és un operador afitat en $L^2(\mu)$?* Es diu que una mesura n-dimensional μ és AD regular si la massa d'una bola de radi r centrada en el suport de μ és comparable a r^n, que un conjunt és rectifica-

ble (en dimensió 1) si es pot cobrir per una unió numerable de corbes de longitud finita, i la rectificabilitat uniforme és un concepte quantitatiu més restrictiu que la rectificabilitat. La pregunta de David i Semmes ha estat contestada (afirmativament) només per al cas 1-dimensional, però encara continua oberta per a dimensions superiors. En la tesi he demostrat el resultat següent, que es pot considerar com una resposta parcial a la pregunta esmentada anteriorment: *Sigui μ una mesura AD regular. Llavors, μ és uniformement rectificable si i només si la variació per a la transformada de Riesz respecte a μ és un operador afitat en $L^2(\mu)$*. Mitjançant aquest resultat, podem afirmar que la variació per a la transformada de Riesz caracteritza completament les mesures AD regulars uniformement rectificables.

Treballs de fi de màster

- Bernat Joseph i Duran va llegir el treball de fi de màster, dirigit per Xavier Gràcia Sabaté, titulat *Sistemes de Lie i l'equació de Riccati matricial*, el dia 3 de març del 2009. El treball correspon al Departament de Matemàtica Aplicada 4, de la Universitat Politècnica de Catalunya.

La impossibilitat de resoldre explícitament sistemes d'equacions diferencials ha empès els matemàtics, des de fa ben bé tres segles, a buscar noves estratègies per a obtenir informació sobre les solucions d'aquests sistemes i calcular-ne, si és possible, algunes. Aquestes estratègies s'han desenvolupat en noves branques de les matemàtiques, sobretot al segle XX. Una d'aquestes estratègies ha estat la teoria de Sophus Lie (1842-1899) de grups continus actuant sobre les varietats en les quals estan definides les equacions.

Aquest és el cas dels sistemes que es tracten en aquest treball: sistemes que admeten un principi de superposició. El problema, plantejat per dos contemporanis de Lie, Ernest Vessiot i Alf Guldberg, alumnes de Lie, és el següent: es tracta de determinar quins sistemes d'equacions diferencials tenen la propietat de poder expressar la seva solució general en funció d'unes quantes solucions particulars (prèviament conegudes) i d'unes quantes constants (relacionades amb les condicions inicials).

Aquesta propietat era coneguda en el cas dels sistemes lineals, per als quals una combinació lineal de solucions esdevé una nova solució; i també per a l'anomenada equació de Riccati:

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2\,,$$

per a la qual, donades solucions $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$,

$$x(t) = \Phi(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t); k) = \\ = \frac{(x_2(t) - x_1(t))\, x_3(t)\, k + (x_1(t) - x_3(t))\, x_2(t)}{(x_2(t) - x_1(t))\, k + (x_1(t) - x_3(t))}$$

és una nova solució.

La caracterització dels sistemes que admeten un principi de superposició va ser donada per Lie, i ve a dir que un sistema d'equacions diferencials $\dot{x} = X(t,x)$ admet un principi de superposició si i només si es pot escriure de la forma

$$X(t,x) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) Y_\alpha(x)\,,$$

on els Y_α són camps vectorials linealment independents que tanquen una $\mathbf{R}$-àlgebra de Lie de dimensió r: $[Y_\alpha, Y_\beta] = \sum c^\gamma_{\alpha\beta} Y_\gamma$. Aquesta caracterització apareix per primera vegada en el llibre de Georg Scheffers *Vorlesungen über Continuierliche Gruppen*, on l'autor recull bona part de l'obra de Lie. És per això que aquest resultat es coneix amb el nom de *teorema de Lie* o, en algunes referències, *teorema de Lie–Scheffers*, la qual cosa també permet distingir-lo d'altres resultats de Lie. El teorema es troba emmarcat en la teoria dels grups i les àlgebres de Lie, que actualment és un dels pilars de la geometria diferencial.

Els principals objectius d'aquest treball són, en primer lloc, revisar el teorema de Lie, donant una versió més detallada de les seves hipòtesis i

la seva demostració per al cas més general, omplint així alguns buits presents en la literatura existent sobre el tema; i, en segon lloc, revisar alguns mètodes pràctics, desenvolupats durant la segona meitat del segle XX, per al càlcul de principis de superposició, i aplicar-los a l'equació de Riccati matricial:

$$\dot{X} = A + BX + XC + XDX\,,$$

on X és una matriu $n \times m$ i A, B, C *i* D són matrius d'ordres adequats.

- Elisa Lorenzo García va llegir el treball de fi de màster, dirigit per Joan-Carles Lario Loyo, titulat *Torcimiento de cuárticas planas lisas*, el dia 25 d'octubre de 2010. El treball correspon al Departament de Matemàtica Aplicada 2 de la Universitat Politècnica de Catalunya.

L'espai de mòduli de corbes algebraiques llises de gènere g sobre $\mathbb{C}$ classifica aquestes corbes llevat d'isomorfisme. Així, un punt d'aquest espai de mòduli representa una classe de corbes respecte a la relació de ser $\mathbb{C}$-isomorfes. Donada una corba algebraica sobre $\mathbb{Q}$, el punt que li correspon en l'espai de mòduli conté totes les corbes isomorfes a aquesta, però no totes elles estaran definides sobre $\mathbb{Q}$.

Un *twist* d'una corba llisa definida sobre $\mathbb{Q}$ és una altra corba definida també sobre $\mathbb{Q}$ representant el mateix punt en l'espai de mòduli, on s'acostuma a considerar la relació d'equivalència de ser $\mathbb{Q}$-isomorfes. En aquest cas, les corbes tenen el mateix nombre de punts racionals sobre $\mathbb{Q}$, i també sobre cossos finits de característica un primer de bona reducció d'ambdues corbes. Per tant, determinar els *twists* d'una corba definida sobre $\mathbb{Q}$ és obtenir la informació aritmètica que es troba codificada pel punt corresponent en l'espai de mòduli.

Quan el gènere és 1, les corbes són corbes el·líptiques, els seus *twists* són ben coneguts i se'n té una classificació completa. Per a gènere 2, dos treballs de Gabriel Cardona determinen i classifiquen els *twists* d'aquestes corbes.

Aquest treball se centra en el cas de gènere 3 no hiperel·líptic. Les corbes de gènere 3 no hiperel·líptiques estan en correspondència biunívoca amb les quàrtiques planes llises. Així, determinar-ne els *twists* és determinar els *twists* de les quàrtiques planes llises. A la literatura sobre el tema es pot trobar una classificació de les quàrtiques planes llises en funció del seu grup d'automorfismes. Aquesta classificació s'utilitza per a calcular els *twists* d'aquestes corbes.

En aquesta memòria es determinen, per a totes les quàrtiques planes llises que admeten un model de Henn definit sobre $\mathbb{Q}$, tots els seus *twists* que provenen dels anomenats cocicles complets. La primera condició no és massa restrictiva, i la segona és una restricció tècnica fàcil d'eliminar.

Tanmateix, el mètode que es proporciona per a calcular *twists* es pot aplicar, sense restriccions, per a calcular tots els *twists* de qualsevol corba de gènere 3 no hiperel·líptica definida sobre qualsevol cos de nombres.

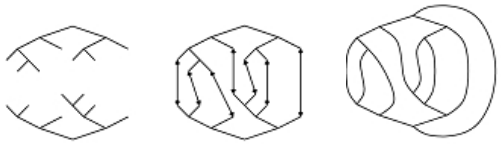
- Eric López Platón va llegir el treball de fi de màster, dirigit per Josep Burillo Puig i Oriol Serra Albó, titulat *Relació entre el grup de Thompson i el teorema dels quatre colors*, el dia 9 de març de 2011. El treball correspon al Departament de Matemàtica Aplicada 4 de la Universitat Politècnica de Catalunya.

L'objectiu d'aquesta tesi de màster era trobar una relació entre el teorema dels quatre colors i la teoria de grups. D'una banda, el teorema dels quatre colors és un resultat conegut de teoria de grafs, que afirma que tot mapa pla es pot acolorir usant només quatre colors, de manera que dues regions adjacents no tinguin el mateix color. Aquest resultat va ser demostrat l'any 1976 per Appel i Haken, però la seva prova utilitzava eines informàtiques i, tot i que malgrat això es considera demostrat, encara ara es busca una demostració d'aquest resultat que no requereixi l'ajut d'ordinadors.

D'altra banda, el grup de Thompson, F, és un grup d'homeomorfismes de l'interval $[0, 1]$, lineals a trossos, amb un seguit de propietats. El fet que permet trobar una relació entre aquest grup i el teorema dels quatre colors és que tot element del grup F es pot representar per una parella d'arbres binaris, amb el mateix nombre de fulles.

Un teorema de Tait prova que el teorema dels quatre colors és equivalent a demostrar que per a tot graf cúbic (és a dir, on tots els vèrtexs tenen tres arestes) es pot trobar una coloració de les arestes amb tres colors de manera que dues arestes que coincideixin en un vèrtex tinguin colors diferents.

A més, és clar que donat un parell d'arbres binaris, unint les fulles (i les arrels), es pot obtenir un mapa cúbic (vegeu la figura). L'objectiu, per tant, era veure l'altra direcció: que d'un mapa cúbic (és a dir, que el graf format per les fronteres és cúbic), se'n poden obtenir dos arbres binaris amb el mateix nombre de fulles. Per tant, buscàvem un cicle hamiltonià sobre les regions del mapa, de manera que tota regió quedés tallada només un cop. Un tal cicle no sempre existeix per a un mapa qualsevol, però un teorema de Whitney de 1931 assegura que sí que n'hi ha, si el mapa no té triangles de tall. En cas que hi hagi triangles de tall, separem el mapa en dos mapes diferents (l'interior i l'exterior) i els acolorim per separat. D'aquesta manera, donat un mapa, podem arribar a un (o diversos) elements del grup F, i les coloracions seran equivalents. Així, obtenim que és equivalent el teorema dels quatre colors a acolorir les arestes dels parells d'arbres binaris corresponents a elements del grup de Thompson.



Finalment, amb aquesta equivalència, es van estudiar els efectes que les propietats algebraiques del grup tenien sobre les coloracions.

- Carlos de Vera Piquero va llegir el treball de fi de màster, dirigit per Víctor Rotger Cerdà, titulat *Rational points on Atkin-Lehner quotients of Shimura curves (Punts racionals en quocients d'Atkin-Lehner de corbes de Shimura)*, el dia 23 de juny de 2011. El treball correspon al Departament de Matemàtica Aplicada 2 de la Universitat Politècnica de Catalunya.

El problema de l'existència de solucions enteres (o racionals) d'una equació diofantina es remunta en la història fins a l'antiga Grècia. Tanmateix, continua proporcionant qüestions obertes que desperten l'interès d'especialistes en teoria de nombres i geometria algebraica.

Sovint aquest problema es tradueix en estudiar el conjunt $X(\mathbb{Q})$ de punts racionals d'una corba algebraica llisa X definida sobre $\mathbb{Q}$. En particular, ens podem preguntar si aquest conjunt és buit. És clar que si $X(\mathbb{Q})$ és no buit, aleshores $X(\mathbb{Q}_p)$ ha de ser no buit per a tot primer $p \leq \infty$, on $\mathbb{Q}_p$ és el cos dels nombres p-àdics (i posem $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$). Quan el recíproc d'aquesta afirmació és cert, es diu que X satisfà el principi de Hasse. Les corbes de gènere 0, per exemple, satisfan aquest principi *local-global*, i hom pot decidir si $X(\mathbb{Q})$ és buit o no en un nombre finit de passos. Tanmateix, per a gènere superior existeixen contraexemples al principi de Hasse, com ara la coneguda cúbica de Selmer $3x^3 + 4x^3 + 5z^3 = 0$. Per a gènere 1, es coneix que si el grup de Tate-Shafarevich de la jacobiana de X és finit (fet que es conjectura

cert) llavors es pot decidir l'existència de punts racionals en X mitjançant un algorisme finit. Quan $X(\mathbb{Q})$ és no buit, X és una corba el·líptica i el problema de descriure completament $X(\mathbb{Q})$ està estretament relacionat amb la conjectura de Birch i Swinnerton-Dyer.

L'objectiu d'aquest treball ha estat investigar condicions suficients per a la no existència de punts racionals en certs quocients de corbes de Shimura. Si X és la corba de Shimura associada a una àlgebra de quaternions racional i indefinida B_D de discriminant $D > 1$, aleshores X és solució (grollera) al problema de mòduli de classificar superfícies abelianes amb multiplicació quaterniònica per B_D. Cal notar que una superfície abeliana representant un punt $P \in X(\bar{\mathbb{Q}})$ no necessàriament admet un model racional sobre $\mathbb{Q}(P)$. Per un treball de Shimura del 1975, X no té punts reals; en particular, $X(\mathbb{Q})$ és buit. Per a un cos quadràtic imaginari K, Jordan, el 1986, estudià condicions suficients perquè el conjunt $X(K)$ sigui buit, i del seu treball sorgeixen nous contraexemples al principi de Hasse. Més recentment, el 2005, Skorobogatov interpretà aquests resultats en termes de descens, provant que aquests contraexemples estan explicats per l'obstrucció de Brauer-Manin.

D'altra banda, la corba X admet de manera natural un grup d'involucions racionals ω_m introduïdes clàssicament per Atkin i Lehner, indexades pels divisors positius m de D. Malgrat que $X(\mathbb{Q})$ és buit, els quocients $X^{(m)}$ de X per les involucions ω_m poden perfectament tenir punts racionals. Inspirats en les idees de Jordan i Skorobogatov, en aquest treball trobem condicions suficients perquè $X^{(m)}(\mathbb{Q})$ sigui buit, fent ús de la interpretació modular de $X^{(m)}$ en termes de superfícies abelianes amb multiplicació real per $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, i obtenint també contraexemples al principi de Hasse desconeguts fins ara.

- Jordi Delgado Rodríguez va llegir el treball de fi de màster, dirigit per Enric Ventura Capell, titulat *Problemes algorísmics en grups lliures per lliure-abelians*, el dia 4 de juliol de 2011. El treball correspon al Departament de Matemàtica Aplicada 3 de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Aquest treball, que té com a objecte l'estudi dels grups lliures per lliure-abelians ($F_n \times \mathbb{Z}^m$), consta de dues parts ben diferenciades.

A la primera s'analitza la seva estructura i els seus paral·lelismes i diferències amb la dels seus factors constituents: F_n i $\mathbb{Z}^m$. Es mostra, per exemple, que els seus subgrups són també lliures per lliure-abelians i que es poden definir de manera natural sobre si mateixos nocions que estenen els estàndards de rang i base.

A continuació analitzem els endomorfismes de $F_n \times \mathbb{Z}^n$ i els caracteritzem en dues classes disjuntes, donant expressions explícites tant per a ells com per a les seves composicions. Veiem que el segon d'aquests tipus és un cas degenerat; mentre que el primer, descrit només en termes de dos endomorfismes dels factors i un terme creuat que controla com s'entrellacen les parts lliure i lliure-abeliana, inclou tots els monomorfismes i epimorfismes de $F_n \times \mathbb{Z}^m$, per als quals obtenim també caracteritzacions explícites. D'aquestes caracteritzacions se'n dedueix immediatament la hopfianitat de $F_n \times \mathbb{Z}^m$ i, per tant, la caracterització dels grups $\mathrm{Aut}(F_n \times \mathbb{Z}^m)$, per als quals es demostra el seu caràcter finitament generat.

A la segona part, un cop establerta la connexió entre l'univers lliure per lliure-abelià i els seus factors, es fa palès que certs problemes de decisió algorísmica a $F_n \times \mathbb{Z}^m$ es traduiran en les versions respectives del problema sobre la part lliure (on ja es disposa de molts resultats) i la part lliure-abeliana (sobre la qual alguns dels problemes de decisió prenen una forma trivial o fàcilment resoluble amb àlgebra lineal), juntament amb una certa complicació derivada de com estan entrellaçades les parts lliures i lliure-abelianes del problema. Succeeix que aquest entrellaçament és, en molt casos, de tipus lineal i per tant atacable amb eines clàssiques. Així, tractem de reduir certs problemes de decisió sobre $F_n \times \mathbb{Z}^m$, als problemes homònims sobre el grup lliure, juntament amb un problema abelià més o menys sofisticat.

La dificultat d'aquest darrer varia sensiblement amb cada problema atacat. Des de casos trivials (com ara el *word problem* i el *conju-*

gacy problem) o quasi (*isomorphism problem* i *membership problem*), fins a casos (com ara el *twisted conjugacy problem*, el *primer problema de Whitehead*, i especialment els problemes de decisió sobre l'*índex finit d'un subgrup*, el *caràcter finitament generat del subgrup de punts fixos per un automorfisme*, la *intersecció de subgrups finitament generats* o el *coset intersection problem*) que necessiten un desenvolupament més elaborat.

A l'extrem final d'aquest espectre, apareixen problemes de decisió que, tot i haver aconseguit reduir-los a problemes abelians raonables, encara no hem pogut resoldre. En particular, per al *segon problema de Whitehead* obtenim un problema matricial d'aspecte assequible que esperem poder resoldre properament. Per al darrer cas (el *problema de Brinkmann*), d'aparença més seriosa, proposem alguna idea que esperem pugui contribuir a la seva resolució en el futur.

- Albert Dalmau Ragolta va llegir el treball de fi de màster, dirigit per Jaume Aguadé Bover, titulat *Witten i la recerca de la veritat supersimètrica*, el dia 11 de juliol de 2011. El treball correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Quan l'experiment no corrobora les prediccions d'una teoria, tenim un dilema: o bé la teoria falla estrepitosament, o bé les eines que tenim són insuficients. La *supersimetria* és una teoria que, bàsicament, transforma bosons en fermions i viceversa. Així, estats bosònics i fermiònics estan aparellats, formant part d'un mateix supermultiplet. Ara bé, cap de les noves partícules que prediu ha estat observada... Així, si considerem que la supersimetria realment existeix, està amagada i diem que està trencada espontàniament. Una simetria està trencada espontàniament quan tenim una col·lecció simètrica d'estats fonamentals i n'elegim un en particular. Per tant, la supersimetria no estarà trencada espontàniament si i només si l'energia del buit és exactament zero; és a dir, que per decidir si hi ha trencament o no, cal buscar estats d'energia zero.

L'objectiu de Witten és introduir alguna quantitat invariant que permeti determinar quan el trencament és possible, i aquesta quantitat resulta que és $n(b) - n(f)$; és a dir, la diferència entre el número d'estats fonamentals bosònics i fermiònics.

Com que hi ha un número arbitrari d'estats fonamentals bosònics i fermiònics, tenim

1. Pot ser, que una parella bosó-fermió amb $E > 0$ decaigui a l'estat fonamental.
2. No pot ser que un bosó o un fermió amb $E > 0$ adquireixi energia individualment, ja que, en el moment que tingui certa energia ha d'aparellar-se.
3. Sí que pot ser, que dos estats fonamentals (un bosònic i un fermiònic) adquireixin energia conjuntament.

Així,

a) Si $n(b) - n(f)$ és diferent de zero, $n(b)$, $n(f)$ o ambdós són diferents de zero. Per tant, hi ha algun estat amb energia zero i, per tant, la supersimetria no està trencada.
b) Si $n(b) - n(f)$ és zero tenim dues possibilitats:
b.1) $n(b) = n(f) = 0$: la supersimetria està trencada.
b.2) $n(b) = n(f) <> 0$: la supersimetria no està trencada.

Witten fa els seus raonaments per $SU(n)$ i fa extensives les seves conclusions a qualsevol tipus de grup. I aquí és on comet un greu error, perquè, no tots els grups són topològicament equivalents a $SU(n)$. En un treball posterior, reflecteix aquest error i proposa alguna solució.

- Fatima Ezzahra Lembarki va llegir el treball de fi de màster, dirigit per Jaume Llibre Saló, titulat *Les òrbites periòdiques i la no integrabilitat dels sistemes hamiltonians de Hénon-Heiles*, el dia 15 de juliol de 2011. El treball correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Aquest treball està basat en l'estudi dels articles:
1. Llibre, J.; Jiménez-Lara, L. «Periodic orbits and non-integrability of Hénon-Heiles systems». *J. Phys. A: Math. Theor.*, 44, doi: 10.1088/1751-8113/44/20/205103
2. Buica, A.; Llibre J. «Averaging methods for finding periodic orbits via brower degree». *Bull. Sci. Math.*, 128 (2004), 7–22.

Estudia bàsicament condicions suficients per a l'existència d'òrbites periòdiques del sistema hamiltonià de Hénon-Heiles: el model de la mecànica hamiltoniana que estudia el moviment d'una galàxia. El hamiltonià clàssic d'aquesta galàxia està donat per:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2\right) + xy^2 - \frac{1}{3}x^3 .$$

Aquest hamiltonià s'ha generalitzat, després, amb la introducció de dos paràmetres A i B:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x^2+p_y^2+x^2+y^2\right)+Bxy^2+\frac{1}{3}Ax^3 . \quad (1)$$

El sistema de les equacions de Hamilton associat a (1) és:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x \\ \dot{p}_x &= -x - (Ax^2 + By^2) \\ \dot{y} &= p_y \\ \dot{p}_y &= -y - 2Bxy . \end{aligned} \quad (2)$$

Per a trobar les condicions suficients sobre els paràmetres A i B perquè existeixin òrbites periòdiques per al sistema diferencial (2) s'aplica la teoria del promig, un mètode senzill, si el comparem amb altres teories anteriors, que va ser la clau de la memòria. Aquest mètode consisteix a reduir el problema de trobar solucions periòdiques d'alguns sistemes diferencials a trobar zeros d'algunes funcions adequades de dimensió finita. Un cop calculades numèricament algunes de les òrbites periòdiques del sistema (2) i amb un dels resultats de Poincaré, que fa servir els multiplicadors de la matriu de monodromia obtinguda de l'equació variacional de les solucions periòdiques del sistema (2), s'estudia la seva integrabilitat Liouville-Arnold: donat H, un hamiltonià amb dos graus de llibertat, H és integrable en el sentit de Liouville-Arnold si té una integral primera C tal que:
a) H i C són independents en tots els punts de l'espai menys potser en un conjunt de mesura de Lebesgue zero. *b)* H i C estan en involució, és a dir que el parèntesi de Poisson val zero.

Els resultats obtinguts són els dos teoremes següents:

Teorema 1 *El sistema de Hénon-Heiles generalitzat admet, per a cada nivell d'energia positiva, almenys:*

a) Una òrbita periòdica si $(2B-5A)(2B-A) < 0$.
b) Dues òrbites periòdiques si $A + B = 0$ *i* $A \neq 0$ *(aquest cas conté el sistema clàssic de Hénon-Heiles).*
c) Tres òrbites periòdiques si $B(2B - 5A) > 0$ *i*$A + B \neq 0$.

Teorema 2 *El sistema de Hénon-Heiles no és integrable en el sentit de Liouville-Arnold perquè si suposem que verifica les condicions d'una de les afirmacions citades en el teorema 1 llavors si apliquem el teorema de Poincaré trobem que:*

a) O bé el sistema de Hénon-Heiles és integrable en el sentit de Liouville-Arnold i els gradients de les dues integrals primeres H i C són linealment dependents en alguns punts de totes les òrbites periòdiques trobades en el teorema 1.
b) O bé el sistema de Hénon-Heiles no és integrable en el sentit de Liouville-Arnold per a qualsevol segona integral primera de classe C^1.